Planche n° 15. Calculs de primitives et d'intégrales : corrigé

Exercice n° 1.

1) Pour tout réel x de $]0,+\infty[$,

$$3x^3-7x\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}-\frac{1}{x}-\frac{4}{\left(\sqrt[4]{x}\right)^7}+\frac{2}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4x^3}+\frac{1}{4x^4}=3x^3-7x^{4/3}+3x^{1/2}-\frac{1}{x}-4x^{-7/4}+2x^{-3/2}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4x^3}+\frac{1}{4x^4},$$

et donc les primitives sur $]0,+\infty[$ de la fonction considérée sont les fonctions de la forme

$$x\mapsto\frac{3x^4}{4}-\frac{7x^{7/3}}{7/3}+\frac{3x^{3/2}}{3/2}-\ln x-\frac{4x^{-3/4}}{-3/4}+\frac{2x^{-1/2}}{-1/2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{12x^3}+C,\ C\in\mathbb{R},$$

ou encore

$$x\mapsto\frac{3x^4}{4}-3x^2\sqrt[3]{x}+2x\sqrt{x}-\ln x+\frac{16}{3\left(\sqrt[4]{x}\right)^3}-\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}-\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{12x^3}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

2) Pour tout réel x, $(x-1)e^{x^2-2x}=\frac{1}{2}(2x-2)e^{x^2-2x}$ et donc les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto(x-1)e^{x^2-2x}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{2}e^{x^2-2x}+C$, $C\in\mathbb{R}$.

3) Soit I un intervalle sur lequel x^2-1 ne s'annule pas.
Pour tout réel x de I, $\frac{x}{(x^2-1)^3}=\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2-1)^3}$ et donc les primitives sur I de la fonction $x\mapsto\frac{x}{(x^2-1)^3}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto-\frac{1}{4(x^2-1)^2}+C$, $C\in\mathbb{R}$.

4) Soit I un intervalle sur lequel x^3+9x-5 est positif.
Pour tout réel x de I, $\left(x^2+3\right)\sqrt{x^3+9x-5}=\frac{1}{3}(3x^2+9)\left(x^3+9x-5\right)^{1/2}$ et donc les primitives sur I de la fonction $x\mapsto\left(x^2+3\right)\sqrt{x^3+9x-5}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{3}\frac{\left(x^3+9x-5\right)^{3/2}}{3/2}+C=\frac{2}{9}\left(x^3+9x-5\right)^{3/2}+C$, $C\in\mathbb{R}$.

5) Pour tout réel x, $\frac{2x+1}{\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)^2}=(2x+1)\left(x^2+x+1\right)^{-2/3}$ et donc les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\frac{2x+1}{\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)^2}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{1/3}\left(x^2+x+1\right)^{1/3}+C=3\sqrt[3]{x^2+x+1}+C$, $C\in\mathbb{R}$.

6) Pour tout réel x de $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$, $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}$ et donc les primitives sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ de la fonction $x\mapsto\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\text{Arcsin}(2x)+C$, $C\in\mathbb{R}$.

7) Pour tout réel x, $\frac{1}{1+4x^2}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{1+(2x)^2}$ et donc les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\frac{1}{1+4x^2}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{2}\text{Arctan}(2x)+C$, $C\in\mathbb{R}$.

8) Pour tout réel x, $\frac{1}{4+x^2}=\frac{1}{2^2+x^2}$ et donc les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\frac{1}{4+x^2}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{2}\text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)+C$, $C\in\mathbb{R}$.

9) Pour tout réel x, $\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ et donc les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^2+x+1}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{3}/2}\text{Arctan}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right)+C$, $C\in\mathbb{R}$, ou encore les fonctions de la forme

$x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C,\ C\in\mathbb{R}$.

10) I est l'un des deux intervalles $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. Pour tout réel x de I, $\dfrac{1}{x\ln x}=\dfrac{1/x}{\ln x}$ et donc les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto \ln|\ln(x)|+C,\ C\in\mathbb{R}$.

11) Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1+e^{-x}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{e^x}}=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ et donc les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto \ln(1+e^x)+C,\ C\in\mathbb{R}$.

12) I désigne un intervalle sur lequel $x-\sin x$ ne s'annule pas. Pour tout réel de I, $\dfrac{\sin^2(x/2)}{x-\sin x}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-\cos x}{x-\sin x}$ et donc les primitives sur I de la fonction $x\mapsto \dfrac{\sin^2(x/2)}{x-\sin x}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto \dfrac{1}{2}\ln|x-\sin x|+C,\ C\in\mathbb{R}$.

13) I désigne un intervalle sur lequel $x-\sin x$ ne s'annule pas. Pour tout réel de I, $\dfrac{\sin^2(x/2)}{(x-\sin x)^3}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-\cos x}{(x-\sin x)^3}$ et donc les primitives sur I de la fonction $x\mapsto \dfrac{\sin^2(x/2)}{(x-\sin x)^3}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto -\dfrac{1}{4(x-\sin x)^2}$, $C\in\mathbb{R}$.

14) $\displaystyle\int\left(\frac{x}{e}\right)^x\ln x\ dx=\int(x\ln x-x)'e^{x\ln x-x}\ dx=e^{x\ln x-x}+C=\left(\frac{x}{e}\right)^x,\ C\in\mathbb{R}$.

Exercice n° 2.

1) $\displaystyle\int \ln x\ dx = x\ln x-\int x\times\frac{1}{x}\ dx=x\ln x-\int 1\ dx = x\ln x - x + C,\ C\in\mathbb{R}$.

2) $\displaystyle\int x\ln x\ dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\ dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\ dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

3) $\displaystyle\int\ln(x+1)\ dx=(x+1)\ln(x+1)-\int(x+1)\times\frac{1}{x+1}\ dx=(x+1)\ln(x+1)-\int 1\ dx=(x+1)\ln(x+1)-x+C,\ C\in\mathbb{R}$.

4) $\displaystyle\int\operatorname{Arcsin}x\ dx=x\operatorname{Arcsin}x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx=x\operatorname{Arcsin}x+\sqrt{1-x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

5) $\displaystyle\int\operatorname{Arctan}x\ dx=x\operatorname{Arctan}x-\int\frac{x}{1+x^2}\ dx=x\operatorname{Arctan}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C,\ C\in\mathbb{R}$.

6) $\displaystyle\int\operatorname{Arccos}x\ dx=x\operatorname{Arccos}x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx=x\operatorname{Arccos}x-\sqrt{1-x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

7) $\displaystyle\int xe^{-x}\ dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}\ dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C=-(x+1)e^{-x}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

8)

$$\begin{aligned}\int\left(x^2-3x+1\right)e^x\ dx&=\left(x^2-3x+1\right)e^x-\int(2x-3)e^x\ dx=\left(x^2-3x+1\right)e^x-(2x-3)e^x+2\int e^x\ dx\\&=\left(x^2-3x+1\right)e^x-(2x-3)e^x+2e^x+C=\left(x^2-5x+6\right)e^x+C,\ C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

9) $\displaystyle\int(1-x)e^{-2x}\ dx=(1-x)\frac{e^{-2x}}{-2}-\frac{1}{2}\int e^{-2x}\ dx=\frac{1}{2}(x-1)e^{-2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}+C=\frac{1}{4}(2x-1)e^{-2x}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

10) $\displaystyle\int\ln\left(1+x^2\right)\ dx=x\ln\left(1+x^2\right)-2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\ dx=x\ln(1+x^2)-2x+2\operatorname{Arctan}x+C,\ C\in\mathbb{R}$.

11)

$$\begin{aligned}\int e^{\operatorname{Arccos}x}\ dx&=xe^{\operatorname{Arccos}x}+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\operatorname{Arccos}x}\ dx\\&=xe^{\operatorname{Arccos}x}-\sqrt{1-x^2}e^{\operatorname{Arccos}x}+\int\sqrt{1-x^2}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}e^{\operatorname{Arccos}x}\ dx\end{aligned}$$

et donc, $\displaystyle\int e^{\operatorname{Arccos}x}\ dx=\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)e^{\operatorname{Arccos}x}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

12)

$$\int \cos x \ln(1+\cos x)\ dx = \sin x \ln(1+\cos x) - \int \sin x \frac{-\sin x}{1+\cos x}\ dx = \sin x \ln(1+\cos x) - \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x + 1}\ dx$$
$$= \sin x \ln(1+\cos x) - \int (\cos x - 1)\ dx = \sin x \ln(1+\cos x) - \sin x + x + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

13) $\dfrac{x}{(x+1)^2}e^x = \dfrac{x+1-1}{(x+1)^2}e^x = \dfrac{1}{x+1}e^x - \dfrac{1}{(x+1)^2}e^x = \left(\dfrac{1}{x+1}e^x\right)'$ et donc $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\ dx = \frac{e^x}{x+1} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

14) $\displaystyle\int x^n \ln x\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

15) 1ère solution.

$$\int e^{ax}\cos(\alpha x)\ dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(\alpha x) + \frac{\alpha}{a}\int e^{ax}\sin(\alpha x)\ dx$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos(\alpha x) + \frac{\alpha}{a^2}e^{ax}\sin(\alpha x) - \frac{\alpha^2}{a^2}\int e^{ax}\cos(\alpha x)\ dx$$

et donc $\left(1+\dfrac{\alpha^2}{a^2}\right)\displaystyle\int e^{ax}\cos(\alpha x)\ dx = \frac{1}{a^2}\left(a\cos(\alpha x) + \alpha\sin(\alpha x)\right)e^{ax} + C,\ C \in \mathbb{R}$ puis

$$\int e^{ax}\cos(\alpha x)\ dx = \frac{1}{a^2+\alpha^2}\left(a\cos(\alpha x) + \alpha\sin(\alpha x)\right)e^{ax} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2ème solution.

$$\int e^{ax}\cos(\alpha x)\ dx = \mathrm{Re}\left(\int e^{(a+i\alpha)x}\ dx\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(a+i\alpha)x}}{a+i\alpha}\right) + C = \frac{e^{ax}}{a^2+\alpha^2}\mathrm{Re}((a-i\alpha)(\cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x))) + C$$
$$= \frac{e^{ax}(a\cos(\alpha x) + \alpha\sin(\alpha x))}{a^2+\alpha^2} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

16) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\ dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\ dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\ dx$ et donc

$$\int \sin(\ln x)\ dx = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

17) $\displaystyle\int x^2 e^x \sin x\ dx = \mathrm{Im}\left(\int x^2 e^{(1+i)x}\ dx\right)$. Or,

$$\int x^2 e^{(1+i)x}\ dx = x^2\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i}\int xe^{(1+i)x}\ dx = x^2\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i}\left(x\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{1}{1+i}\int e^{(1+i)x}\ dx\right)$$
$$= \left(\frac{x^2}{1+i} - \frac{2x}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3}\right)e^{(1+ix)} + C$$
$$= \left(\frac{1-i}{2}x^2 + ix - \frac{1+i}{2}\right)e^{(1+ix)} + C$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^2 - 1 + i(-x^2+2x-1))\right)(\cos x + i\sin x)e^x + C.$$

Par suite,

$$\int x^2 e^x \sin x\ dx = \frac{1}{2}\left((x^2-1)\sin x - (x^2-2x+1)\cos x\right)e^x + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

18) Sur $]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1-x^2}\,dx &= x\sqrt{1-x^2}-\int x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2}-\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{Arcsin}x-\int\sqrt{1-x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Les primitives sur $]-1,1[$ de la fonction $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{Arcsin}x\right)+C$, $C\in\mathbb{R}$.

Exercice n° 3.

1) Soit I un intervalle ne contenant ni $-\frac{1}{2}$ ni -2. Déterminons deux réels a et b tels que pour tout réel x de I,

$$\frac{1}{2x^2+5x+2}=\frac{1}{2(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+\frac{1}{2}}.$$

Pour tout réel x de I,

$$\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+\frac{1}{2}}=\frac{a}{x+2}+\frac{2b}{2x+1}=\frac{a(2x+1)+2b(x+2)}{2x^2+5x+2}=\frac{2(a+b)x+(a+4b)}{2x^2+5x+2}.$$

On choisit a et b tels que $2(a+b)=0$ et $a+4b=1$ c'est-à-dire $a=-\frac{1}{3}$ et $b=\frac{1}{3}$. Pour tout x de I, on a

$$\frac{1}{2x^2+5x+2}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right).$$

Les primitives sur I de la fonction $x\mapsto\frac{1}{2x^2+5x+2}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{3}\left(\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|-\ln|x+2|\right)+C$, $C\in\mathbb{R}$.

2) Soit I un intervalle ne contenant pas $\frac{1}{2}$. Pour tout réel x de I,

$$\frac{1}{4x^2-4x+1}=\frac{1}{(2x-1)^2}.$$

Les primitives sur I de la fonction $x\mapsto\frac{1}{4x^2-4x+1}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto-\frac{1}{2(2x-1)}+C$, $C\in\mathbb{R}$.

3) Pour tout réel x,

$$\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{(x+1)^2+1}.$$

Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^2+2x+2}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\operatorname{Arctan}(x+1)+C$, $C\in\mathbb{R}$.

4) Pour tout réel x,

$$\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^2+x+1}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{3}/2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C$, $C\in\mathbb{R}$ ou encore $x\mapsto\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$, $C\in\mathbb{R}$.

5) Pour tout réel x,

$$\frac{1}{x^2-2x\cos\theta+1}=\frac{1}{(x-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}.$$

Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x^2-2x\cos\theta+1}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\dfrac{1}{\sin\theta}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-\cos\theta}{\sin\theta}\right)+C$, $C\in\mathbb{R}$.

Exercice n° 4.

1) 1ère solution. En posant $t=\tan\dfrac{x}{2}$ et donc $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$,

$$\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\int\frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1}{t}\,dt=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

2 ème solution. $\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{\sin^2 x}=\dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}$. En posant $t=\cos x$ et donc $dt=-\sin x\,dx$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sin x}\,dx&=\int\frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x}=\int\frac{-1}{1-t^2}\,dt=\int\frac{1}{t^2-1}\,dt\\&=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\tan^2\frac{x}{2}\right|+C\\&=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

2) 1ère solution. On pose $t=\tan\dfrac{x}{2}$ et donc $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\cos x}\,dx&=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2}{1-t^2}\,dt\\&=\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\,dt=\ln|1+t|-\ln|1-t|+C\\&=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}\right|+C\\&=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.\end{aligned}$$

2ème solution. En posant $t=\sin x$

$$\int\frac{1}{\cos x}\,dx=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx=\ldots=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C\ldots$$

3ème solution. 2n posant $u=x+\dfrac{\pi}{2}$,

$$\int\frac{1}{\cos x}\,dx=\int\frac{1}{\cos\left(u-\frac{\pi}{2}\right)}\,du=\int\frac{1}{\sin u}\,du=\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|+C=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan x}=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\ln|\sin x|+C,\ C\in\mathbb{R}.$

4) $\displaystyle\int\frac{1}{2+\sin^2 x}\,dx=\int\frac{1}{\frac{2}{\cos^2 x}+\tan^2 x}\times\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{1}{2\left(1+\tan^2 x\right)+\tan^2 x}\times\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{1}{2+3\tan^2 x}\times\frac{dx}{\cos^2 x}.$

En posant $u=\tan x$, on obtient

$$\int\frac{1}{2+\sin^2 x}\,dx=\int\frac{1}{2+3u^2}\,du=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}u\right)+C=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right))+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

5)

$$\frac{\cos(3x)}{\sin x+\sin(3x)}\ dx=\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{4\sin x-4\sin^3 x}=\frac{1}{4}\times\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{\sin x(1-\sin^2 x)}=\frac{1}{4}\times\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{\sin x\cos^2 x}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4\cos x}{\sin x}-\frac{3}{\sin x\cos x}\right)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{\sin(2x)}.$$

Par suite,

$$\int\frac{\cos(3x)}{\sin x+\sin(3x)}\ dx=\ln|\sin x|-\frac{3}{4}\ln|\tan x|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

5) $\cos^4 x+\sin^4 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2(2x)$, et donc

$$\int\frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}\ dx=\int\frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin^2(2x)}\ dx=\int\frac{1}{2-\sin^2 u}\ du\ \text{(en posant } u=2x)$$
$$=\int\frac{1}{1+\cos^2 u}\ du=\int\frac{1}{1+\frac{1}{1+v^2}}\ \frac{dv}{1+v^2}\ \text{(en posant } v=\tan u)$$
$$=\int\frac{dv}{v^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\tan(2x)}{\sqrt{2}}\right)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Exercice n° 5.

Pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x+\sin x\geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $\cos x=\sin x=0$. Donc, pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x+\sin x>0$ et en particulier, pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x+\sin x\neq 0$.

Ainsi, les deux fonctions $x\mapsto\dfrac{\cos x}{\cos x+\sin x}$ et $x\mapsto\dfrac{\sin x}{\cos x+\sin x}$ sont continues sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ en tant que quotient de fonctions continues sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que les intégrales I et J existent.

$I+J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}$. et $I-J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\ dx=[\ln|\cos x+\sin x|]_0^{\pi/2}=0$. Donc

$$\boxed{I=J=\frac{\pi}{4}.}$$

Exercice n° 6.

1) En posant $t=e^x$ et donc $x=\ln t$ puis $dx=\dfrac{dt}{t}$,

$$\int\frac{1}{\operatorname{ch}x}\ dx=\int\frac{2}{t+\frac{1}{t}}\frac{dt}{t}=2\int\frac{1}{1+t^2}\ dt=2\operatorname{Arctan}(e^x)+C,$$

ou bien

$$\int\frac{1}{\operatorname{ch}x}\ dx=\int\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2 x+1}\ dx=\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}x)+C.$$

Remarque. Les deux fonctions $x\mapsto 2\operatorname{Arctan}(e^x)$ et $x\mapsto\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}x)$ sont deux primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}$. Elles diffèrent donc d'une constante. Comme ces deux primitives prennent la même valeur en 0, on a donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\ 2\operatorname{Arctan}(e^x)=\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}x).$$

2) En posant $t=e^x$ et donc $x=\ln t$ puis $dx=\dfrac{dt}{t}$,

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh} x}\,dx = \int \frac{2}{t-\frac{1}{t}}\frac{dt}{t} = 2\int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$= \ln|t-1| - \ln|t+1| + C = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C = \ln\left|\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^{x/2}+e^{-x/2}}\right| + C$$
$$= \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{th} x}\,dx = \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\,dx = \ln|\operatorname{sh} x| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

4) $\displaystyle\int \operatorname{ch}^3\ dx = \int \left(\operatorname{sh}^2 x + 1\right)\operatorname{ch} x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh} x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

5) Pour tout réel x, $\operatorname{ch}^4 x = \dfrac{1}{16}(e^x+e^{-x})^4 = \dfrac{1}{16}\left(e^{4x}+4e^{2x}+6+4e^{-2x}+e^{-4x}\right) = \dfrac{1}{8}(\operatorname{ch}(4x)+4\operatorname{ch}(2x)+3)$ et donc

$$\int \operatorname{ch}^4 x\,dx = \frac{1}{32}(\operatorname{sh}(4x)+8\operatorname{sh}(2x)+12x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

6)

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{sh} x}\,dx &= \int \frac{1+\operatorname{sh}^2 x}{1+\operatorname{sh} x}\operatorname{ch} x\,dx \\ &= \int \frac{u^2+1}{u+1}\,du \text{ (en posant } u = \operatorname{sh} x) \\ &= \int \frac{u^2-1+2}{u+1}\,du \text{ (en posant } u = \operatorname{sh} x) \\ &= \int (u-1+\frac{2}{u+1})\,du = \frac{u^2}{2} - u + 2\ln|u+1| + C \\ &= \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2} - \operatorname{sh} x + 2\ln|1+\operatorname{sh} x| + C,\ C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

7) On peut poser $u = e^x$ mais il y a mieux.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\operatorname{ch} x - 1}\,dx &= \int \frac{\sqrt{(\operatorname{ch} x-1)(\operatorname{ch} x+1)}}{\sqrt{\operatorname{ch} x+1}}\,dx = \int \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x}}{\sqrt{\operatorname{ch} x+1}}\,dx = \operatorname{sgn}(x)\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} x+1}}\,dx \\ &= 2\operatorname{sgn}(x)\sqrt{\operatorname{ch} x+1} + C.\end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x+1}\,dx &= \int \frac{1}{\operatorname{ch} x(\operatorname{ch} x+1)}\operatorname{sh} x\,dx \\ &= \int \frac{1}{u(u+1)}\,du \text{ (en posant } u = \operatorname{ch} x) \\ &= \int \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)\,du = \ln\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x+1} + C,\ C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-\operatorname{ch} x}\,dx &= \int \frac{1+\operatorname{ch} x}{1-\operatorname{ch}^2 x}\,dx = -\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx - \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx \\ &= \operatorname{coth}x + \frac{1}{\operatorname{sh} x} + C.\end{aligned}$$

Exercice n° 7.

1) En posant $u = x - 1$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - (x-1)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\,du = \text{Arcsin}\,u + C = \text{Arcsin}(x-1) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\,dx &= \int \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{(1+x) - (1-x)}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx - \int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \frac{u}{u^2-1} 2u\,du + \int \frac{v}{1-v^2} 2v\,dv\right) \text{ (en posant } u = \sqrt{1+x} \text{ et } v = \sqrt{1-x}) \\
&= \int \frac{u^2 - 1 + 1}{u^2 - 1}\,du + \int \frac{v^2 - 1 + 1}{1 - v^2}\,dv \\
&= \int \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\right)du + \int \left(-1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\right)\right)dv \\
&= u - v + \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + \ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|\right) + C \\
&= \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\right| + \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right|\right) + C.
\end{aligned}$$

3) On pose $u = x^6$ puis $v = \sqrt{1+u}$ (ou directement $u = \sqrt{1+x^6}$) et on obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^6}\,x^5 dx = \frac{1}{6}\int \frac{\sqrt{1+u}}{u}\,du \\
&= \frac{1}{6}\int \frac{v}{v^2-1} 2v\,dv = \frac{1}{3}\int \frac{v^2}{v^2-1}\,dv = \frac{1}{3}\left(\int \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\right)\right)dv\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(v + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^6} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1}\right|\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exercice n° 8.

1) On pose $t = \dfrac{1}{x}$ et donc $x = \dfrac{1}{t}$ et $dx = -\dfrac{1}{t^2}\,dt$. On obtient

$$I = \int_{1/a}^{a} \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx = -\int_{a}^{1/a} \frac{\ln(1/t)}{\frac{1}{t^2}+1}\frac{1}{t^2}\,dt = -\int_{1/a}^{a} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt = -I,$$

et donc, $I = 0$.

2) $\cos(px)\cos(qx) = \dfrac{1}{2}(\cos(p+q)x + \cos(p-q)x)$ et donc,

Premier cas. Si $p \neq q$,

$$\int_0^{\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(p+q)x}{p+q} + \frac{\sin(p-q)x}{p-q}\right]_0^{\pi} = 0.$$

Deuxième cas. Si $p = q \neq 0$,

$$\int_0^{\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 + \cos(2px))\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Troisième cas. Si $p = q = 0$. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx = \int_0^{\pi} dx = \pi.$

La démarche est identique pour les deux autres et on trouve $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(px)\sin(qx)\ dx = 0$ si $p \neq q$ et $\dfrac{\pi}{2}$ si $p = q \neq 0$ puis $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(px)\cos(qx)\ dx = 0$ pour tout choix de p et q.

3) La courbe d'équation $y = \sqrt{(x-a)(b-x)}$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-(a+b)x+ab=0 \\ y \geqslant 0 \end{array}\right.$ est le demi-cercle de diamètre $[AB]$ où $A(a,0)$ et $B(b,0)$.
Par suite, si $a \leqslant b$, $I = \dfrac{\pi R^2}{2} = \dfrac{\pi(b-a)^2}{8}$ et si $a > b$, $I = -\dfrac{\pi(b-a)^2}{8}$.

4) L'intégrale proposée est somme de quatre intégrales. Chacune d'elles est la somme des aires de deux triangles rectangles isocèles. Ainsi, $I = \dfrac{1}{2}((1^2+3^2)+(2^2+2^2)+(3^2+1^2)+4^2) = 22$.

5) On pose $u = \dfrac{1}{x}$. On obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/2}^{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) \operatorname{Arctan} x\ dx = \int_{2}^{1/2} (1+u^2) \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right) \frac{-du}{u^2} = \int_{1/2}^{2} (1+\frac{1}{u^2}) \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} u\right)\ du \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\left(2-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}-2\right)\right) - I. \end{aligned}$$

Par suite, $I = \dfrac{3\pi}{2} - I$ et donc $I = \dfrac{3\pi}{4}$.

7) En posant $x = \pi - u$, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\ dx = \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi-u)\sin(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}\ -du = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{1+\cos^2 u}\ du - \int_0^{\pi} \frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}\ du \\ &= -\pi\left[\operatorname{Arctan}(\cos u)\right]_0^{\pi} - I = \frac{\pi^2}{2} - I, \end{aligned}$$

et donc, $I = \dfrac{\pi^2}{4}$.

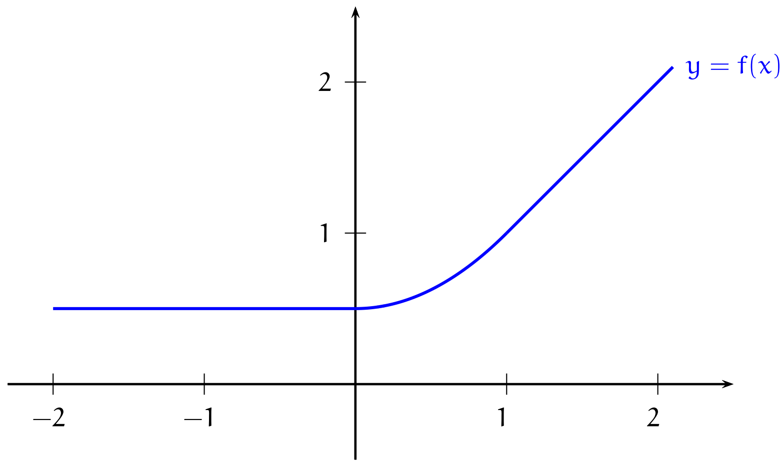
Exercice n° 8. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \operatorname{Max}(x,t) = \dfrac{1}{2}(x+t+|x-t|)$ est continue sur $[0,1]$ en vertu de théorèmes généraux. Par suite, $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Max}(x,t)\ dt$ existe.

- Si $x \leqslant 0$, alors $\forall t \in [0,1]$, $x \leqslant t$ et donc $\operatorname{Max}(x,t) = t$. Par suite, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t\ dt = \frac{1}{2}$.
- Si $x \geqslant 1$, alors $\forall t \in [0,1]$, $t \leqslant x$ et donc $\operatorname{Max}(x,t) = x$. Par suite, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 x\ dt = x$.
- Si $0 < x < 1$,

$$f(x) = \int_0^x x\ dt + \int_x^1 t\ dt = x^2 + \frac{1}{2}(1-x^2) = \frac{1}{2}(1+x^2).$$

En résumé, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} \text{ si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}(1+x^2) \text{ si } 0 < x < 1 \\ x \text{ si } x \geqslant 1 \end{array}\right.$.

Graphe de f.



Exercice n° 9.

1) $W_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $x \mapsto \sin^{n+1} x$ et $x \mapsto -\cos x$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin x \sin^{n+1} x \, dx = \left[-\cos x \sin^{n+1} x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos x)(n+1)\cos x \cos^n x \, dx \\
&= 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^n x \, dx \; (\sin^{n+1}(0) = 0 \text{ car } n+1 > 0) \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\sin^n x \, dx = (n+1)\left(\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x \, dx\right) \\
&= (n+1)\,(W_n - W_{n+2})
\end{aligned}$$

et donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.}$$

3) 1er cas. Si n est un entier naturel non nul et pair, on peut poser $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \ldots \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times W_0 \\
&= \frac{(2p) \times (2p-1) \times (2p-2) \times (2p-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}{((2p) \times (2p-2) \times (2p-4) \times \ldots \times 4 \times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p)!}{(2^p \times p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $p = 0$ et donc

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}.}$$

2ème cas. Si n est un entier naturel impair supérieur ou égal à 3, on peut poser $n = 2p+1$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}\times\ldots\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times W_1\\ &= \frac{((2p)\times(2p-2)\times(2p-4)\times\ldots\times4\times2)^2}{(2p+1)\times(2p)\times(2p-1)\times\ldots\times3\times2\times1}\\ &= \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}.\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $p=0$ et donc

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ W_{2p+1}=\frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}.}$$

Exercice n° 10.

1) $I_0=\displaystyle\int_0^{\pi/4}dx=\frac{\pi}{4}$ et $I_1=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=[-\ln|\cos x|]_0^{\pi/4}=\frac{\ln 2}{2}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^{\pi/4}(\tan^n x+\tan^{n+2}x)\,dx=\int_0^{\pi/4}\tan^n x(1+\tan^2 x)\,dx=\left[\frac{\tan^{n+1}x}{n+1}\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{n+1}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(I_{2k-2}+I_{2k})=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_{2k-2}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_{2k}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k I_{2k}-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k I_{2k}=I_0-(-1)^n I_{2n}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_{2n}=(-1)^n\left(\dfrac{\pi}{4}-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)$.

De même, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}=I_1-(-1)^n I_{2n+1}$ et donc, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_{2n+1}=\dfrac{(-1)^n}{2}\left(\ln 2-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

2) Soient $\varepsilon\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

$$0\leqslant I_n=\int_0^{\pi/4-\varepsilon/2}\tan^n x\,dx+\int_{\pi/4-\varepsilon/2}^{\pi/4}\tan^n x\,dx\leqslant\frac{\pi}{4}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Maintenant, $0<\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)<1$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0$. Par suite, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour $n\geqslant n_0$, $0\leqslant\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n\geq n_0$, on a alors $0\leqslant I_n<\varepsilon$.

Ainsi, I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit immédiatement que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2\text{ et }\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}.}$$

